-EXERCICE 28.6-

• ENONCE :

« Chauffage par induction »

Soit un solénoïde illimité de rayon R, d'axe Oz, comportant un nombre n de spires par unité de longueur ; il est parcouru par un courant : $i(t) = I_0 \cos\omega t$.

A l'intérieur, on place un cylindre conducteur (conductivité γ) plein, homogène, de rayon a très inférieur à sa longueur L (l'axe du cylindre est également Oz).

1) Décrire les phénomènes observés.
2) On fait l'hypothèse que le champ magnétique créé par les courants induits dans le cylindre est négligeable devant le champ du solénoïde ; calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le cylindre.
3) Déterminer le champ magnétique créé par les courants induits.

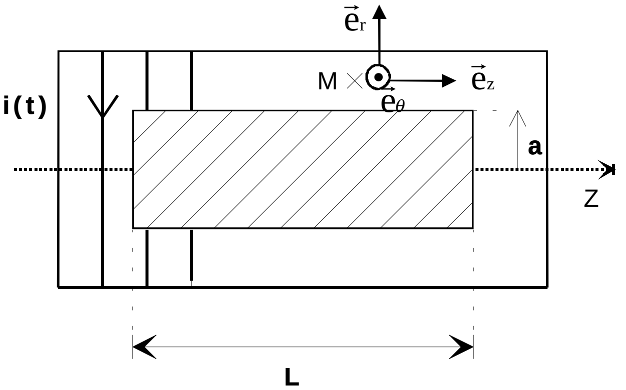
   A quelle condition portant sur a ce champ est-il effectivement négligeable devant celui du solénoïde ? Interpréter cette condition, après avoir lu le chapitre 29…

• CORRIGE :

« Chauffage par induction »

1) Les variations temporelles du flux du champ d'origine extérieure au cylindre (champ « inducteur », noté $\vec{B}_e$) vont engendrer des f.e.m, donc des courants induits dans ce cylindre qui est conducteur : ceux-ci seront à l'origine d'une dissipation d'énergie électromagnétique sous forme thermique (effet Joule).

2)Nous allons raisonner avec les notations de la figure suivante :



Les symétries et invariances classiques montrent que le champ inducteur est porté par Oz et est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

Les courants sont orientés de manière à ce que le champ soit dans le sens **+** de Oz.

• L'effet Joule « local » est donné par : $\dfrac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$ (pour un milieu ohmique), avec $\vec{E}$ le champ induit par $\vec{B}_e$; il faut donc connaître la « topologie » du champ $\vec{E}$.

Pour cela, remarquons que la relation : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}_e}{\partial t}$ permet d'affirmer que $\vec{E}$ est perpendiculaire aux plans de symétrie de $\vec{B}_e$; un tel plan est le plan Moz : $\vec{E}$ est donc **orthoradial** et ne dépend que de r (invariance par rotation et par translation, puisque le solénoïde est illimité).

• Si le rotationnel est donné en coordonnées cylindriques, alors on fait avec...

Sinon, on utilise la relation : $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}[\iint_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$, où (C) est un cercle d'axe Oz, de rayon r et (S) le disque correspondant ; il vient :

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(r,t)2\pi r = -\frac{d(B_e\pi r^2)}{dt} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(r,t) = \frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) r}{2}\vec{e}_\theta}$$ d'où :

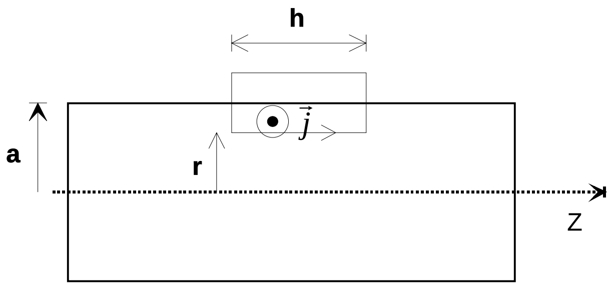
$$\frac{dP_J}{d\tau} = \gamma E^2 = \gamma\left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2}\right)^2 \sin^2(\omega t) r^2 \Rightarrow \langle \frac{dP_J}{d\tau}\rangle_t = \gamma\frac{(\mu_0 n I_0\omega)^2}{8}r^2 \quad \text{puisque: } \langle \sin^2(\omega t)\rangle_t = 1/2$$

• Comme $\dfrac{dP_J}{d\tau}$ ne dépend que de r, notre élément d'intégration sera un « tube » d'axe Oz, d'épaisseur dr et de longueur L ; on a donc $d\tau = 2\pi L r dr$ et il vient :

$$\langle P_J\rangle_t = \frac{\gamma(\mu_0 n I_0 \omega)^2 2\pi L}{8}\int_0^a r^3 dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle P_J\rangle_t = \frac{\gamma(\mu_0 n I_0\omega)^2 \pi L a^4}{16}}$$

3) • Puisque $a \ll L$, nous ferons l'hypothèse que le cylindre est lui-même illimité (nous négligerons les effets de bord) ; les courants étant orthoradiaux, le champ induit (noté $\vec{B}_i$) sera de la forme : $\vec{B}_i(r,t) = B_i(r,t)\vec{e}_z$ (invariances et symétries).

Comme pour tous les solénoïdes illimités, le champ est constant à l'extérieur et même **nul** partout en considérant qu'il est nul à l'infini ; nous allons appliquer le théorème d'Ampère :



Le sens + du contour d'Ampère a été choisi de manière à ce que la normale à sa surface soit dans le même sens que les courants induits (sens de parcours trigo).

$$\oint_C \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_e \Rightarrow B_i \times h = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S j(r,t)dS = \mu_0^2 \frac{\gamma n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \int_r^a hr'dr'$$; d'où :

$$\boxed{\vec{B}_i(r,t) = \frac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega}{4}(a^2 - r^2)\sin(\omega t)\vec{e}_z}$$

• Nous allons comparer les amplitudes de $\vec{B}_e$ et $\vec{B}_i$, soit respectivement :

$\mu_0 n I_0$ et $\dfrac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega a^2}{4}$ (en se plaçant en r=0, où l'amplitude de $\vec{B}_i$ est maximum) ; pour pouvoir négliger partout le champ induit devant le champ inducteur, il faut donc que :

$$\frac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega a^2}{4} \ll \mu_0 n I_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \ll \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

Rq : dans le chapitre 29, nous introduirons la grandeur : $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ = « épaisseur de peau », qui représente l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle peut pénétrer une onde électromagnétique dans un conducteur ohmique ; il est clair que si la condition précédente n'est pas respectée, le champ inducteur n'existera qu'à la surface du cylindre et que dans le cœur du cylindre nous ne pourrons négliger le champ induit (qui sera le seul à exister).